Лекция 1. Виды случайных событий. Определения вероятности.

Под "событием" в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате (опыта) испытания может произойти или не произойти. Таким образом, мы будем рассматривать событие как результат испытания (опыта). Приведем несколько примеров событий:

```
A - появление герба при бросании монет;
B - попадание в цель при выстреле;
C - появление туза при вынимания карты из колоды;
```

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, должно произойти в результате испытания.

Невозможным называет событие, которое в данном испытании не может произойти.

1. Выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости - достоверное событие.
2. Появление 12 очков при бросании одной игральной кости - невозможное событие.
3. При бросании монеты выпал герб и при бросании монеты выпала цифра - случайные события.

События называет несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Примеры:

1. выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты; появление герба исключает появление цифры
2. попадание и промах при одном выстреле.

События называют единственно возможными, если появление при испытании хотя бы одного из них является достоверным событием; в этом случае говорят, что события образуют полную группу.

Примеры:

1. попадание и промах при выстреле (обязательно произойдет одно из них);
2. появление 1,2,3,4,5,6 очков при бросании игральной кости.

События называет равновозможными, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие. Примеры:

1. выпадение герба и цифры;
2. появление карты бубновой, червонной, трефовой масти привынимании карты из колоды.

События, обладающие этими тремя свойствами называются случаями (шансами).

Случай называется благоприятным или благоприятствующим некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление данного события.

Например, при бросании игральной кости возможны шесть случаев: появление 1,2,3,4,5,6 очков. Из них событию А - появление четного числа очков - благоприятны три случая: 2,4,6 и не благоприятны остальные.

I. ***Классическое определение вероятности***. Вероятность события А вычисляется как отношение числа благоприятных случаев к общему числу случаев и обозначается

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

P(A) - вероятность события *A* ; *n* - общее число случаев, *m* — благоприятных событию *A.*

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице. Действительно, если событие достоверно, то каждый случай благоприятствует событию т.е. *m = n*

P(A)=1.

2. Вероятность невозможного события *P(A)=0.* Ни один случай не благоприятствует.

3. Вероятность случайного события есть положительное число $0 \le P(A) \le 1$.
Действительно, число благоприятных случаев заключено между $0 \le m \le n$,
$c \le \frac{m}{n} \le 1$, $0 \le P(A) \le 1$.

Пример. В урне находится 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад вынимается один шар. Требуется найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Обозначим *A* - событие, состоящее; в появлении белого шара.

Общее число случаев n = 5; число случаев благоприятных событию *A* m = 2.

Следовательно $P(A) = \frac{2}{5}$

2. Относительная частота или ***статистическая вероятность***. Относительной частотой или статистической вероятностью события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу произведенных испытаний и обозначается

$$W(A) = \frac{M}{n}$$

где *M* - число появлений события *A*

n - общее число произведенных испытаний.

Сопоставляя эти определения заключаем, что вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту - после опыта.

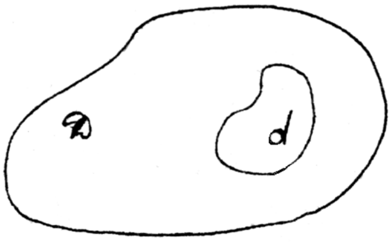
Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производятся опыты, в каждом из которых число испытания достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется очень мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности

$$W(A) \approx P(A)$$

Геометрическая вероятность

Если возможность случайного появления точки внутри некоторой области на прямой, плоскости или в пространстве определяется не положением этой области и ее границами, а только её размером, то есть длиной, площадью или объемом, то вероятность появления случайной точки внутри некоторой области d определяется как отношение размера этой области к размеру всей области D, в которой может появляться данная точка.



Пусть на плоскости имеется некоторая область D, площадь которой S_D, и в ней содержится другая область d , площадь которой S_d.В область D наудачу бросается точка. Спрашивается, чему равна вероятность того, что точка попадает в область d? При этом предполагается, что наудачу брошенная точка может попасть в любую точку области D и вероятность попасть в какую-либо часть области D пропорциональна площади этой частb и не зависит от ее расположения и формы. В таком случае вероятность попадания в область d при бросании наудачу точки в область D равна

$$P = \frac{S_d}{S_D}$$

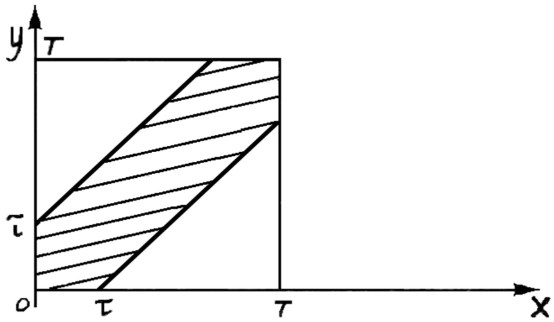
Пример I.(задача о встрече). Два студента договорились о встрече, которая должна произойти в определенном месте в любой момент промежутки, времени T. Определить вероятность встречи, если моменты прихода каждого студента независимы и время ожидания одним другого будет не больше ? .

Решение. Обозначим момент прихода одного студента через x, а второго - через y. Чтобы встреча состоялась, необходимо и достаточно, чтобы

$$|x - y| \le \tau$$

Будем рассматривать x и y как декартовы координаты на плоскости, всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной T, а исходы, благоприятствующие встрече, расположатся в заштрихованной области.

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата, то есть



$$P = \frac{T^2 - (T - \tau^2)}{T^2} = 1 - (1 - \frac{\tau}{T})^2$$

1. T = 1 час $P \approx 0{,}4$

   τ=15 мин.

   2. T = 20 час $P \approx 0{,}9$

   τ=15 мин.